Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ

(заочная форма обучения)

Преподаватель **Шевелева Наталья Евгеньевна**

контактная информация sh_ne@mail.ru

ОП.04 (ОП.08, 09) «Математика» входит в профессиональный учебный цикл для направлений подготовки

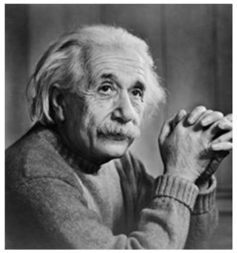
	1 курс	2 курс
23.02.03«ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ И РЕМОНТ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА»	12 ч =6Л+6ПЗ	14 ч =6Л+8ПЗ
22.02.01«СВАРОЧНОЕ ПРОИЗВОДСТВО»	12 ч =6Л+6ПЗ	14 ч =6Л+8ПЗ
08.02.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО И ЭКСПЛУАТАЦИЯ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ»	12 ч =6Л+6ПЗ	14 ч =6Л+8ПЗ
38.02.04 «КОММЕРЦИЯ»	12 ч =6Л+6ПЗ	14 ч =6Л+8ПЗ
	контрольная работа	контрольная работа
Форма промежуточной аттестации	экзамен	экзамен

Если вы не можете объяснить что-то просто – вы сами этого не понимаете

Альберт Эйнштейн

Образование – это то, что остается, когда забываешь все, что изучал в школе

Альберт Эйнштейн

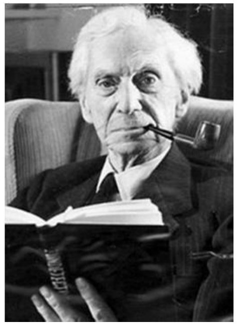


Albert Einstein (1879-1955)

физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года

Математика представляет собой собрание выводов, которые могут быть применены к чему угодно

Бертран Рассел



Bertrand Arthur William Russell (1724-1804)

английский математик, философ и общественный деятель

В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики

Иммануил Кант

Immanuel Kant (1724-1804)

немецкий философ, родоначальник немецкой классической философии, стоящий на грани эпох Просвещения и Романтизма

ЦЕЛЬ КУРСА

1. Дать представление о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики.
2. Сформировать комплекс математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : Учеб. пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4.

   ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/421221

2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : Учеб. пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-2.

   ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/421222

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: **МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ**

ЦЕЛЬ: Определить понятие матрицы, сформировать навыки выполнения матричных операций

План:

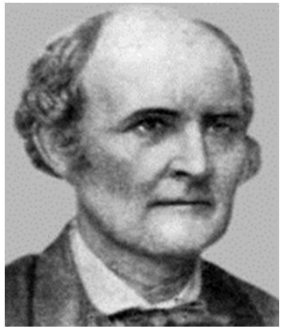
1. Определение и смысл матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами.

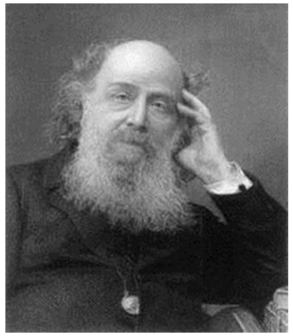
ИЗ ИСТОРИИ ПОЯВЛЕНИЯ МАТРИЦ

Габриэль Крамер (1704-1752)
швейцарский математик,
один из создателей линейной алгебры

«Введение в анализ алгебраических кривых» (1750)

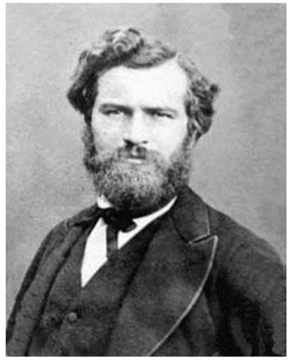
Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865)
ирландский математик, механик-теоретик, физик-теоретик
автор предельно общего вариационного принципа
наименьшего действия





Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1897)
английский математик
ввел понятие матрицы (1850)

Артур Кэли (1821-1895)
английский математик



Фердинанд Георг Фробениус (1849-1917)
немецкий математик

Мари Энмон Камиль Жордан (1838-1922)
французский математик,
заложил основы теории детерминантов

Александр Теофил Вандермонд (1735-1796)
французский музыкант и математик,
заложил основы теории детерминантов

МАТРИЦА размера *m*×*n*

совокупность $m \cdot n$ чисел или иных математических выражений, расположенных в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов

$$A_{m\times n} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n\ \text{столбцов}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m\ \text{строк}$$

i строка

j столбец

элемент матрицы

$$a_{ij} \in \mathrm{R}$$

номер столбца

номер строки

Характеристики матрицы:

– Размерность
– Определитель
– Ранг
– Собственные числа

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 8 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{13} = 7 \\ a_{32} = 8 \\ a_{24} = 1 \end{array}$$

ВИДЫ МАТРИЦ

$m = 1$ $\quad A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ вектор-строка

$n = 1$ $\quad A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ вектор-столбец

$m = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

побочная диагональ

главная диагональ

диагональные элементы

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

единичная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\det E = 1$$

$$AE = EA = A$$

нулевая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = O$$

верхняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

нижняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

симметричная матрица

$$a_{12} = a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & \boxed{5} \\ -1 & 2 & \boxed{6} \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad a_{13} = a_{31} \quad a_{23} = a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = A$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

1. СРАВНЕНИЕ МАТРИЦ

матрицы **РАВНЫ**, если

– они имеют одинаковые размеры (одинаковую структуру);
– элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

ПРИМЕР 1 Сравнить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sin\pi & \cos\pi \\ \ln e^2 & \sqrt[4]{9} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & p \\ g & r \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

$$a_{11} = 0 \;=\; b_{11} = \sin\pi \qquad a_{12} = -1 \;=\; b_{12} = \cos\pi$$

$$a_{21} = 2 \;=\; b_{21} = \ln e^2 \qquad a_{22} = \sqrt{3} \;=\; b_{22} = \sqrt[4]{9} \qquad \Rightarrow \quad A = B$$

$$a_{11} = 0 \quad \neq \quad c_{11} = 1 \qquad \forall p, g, r \qquad \Rightarrow \quad A \neq C$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ *Am×n* НА ЧИСЛО *λ*

матрица $B_{m\times n}$ такая, что

$$B_{m\times n} = \lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 2 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

Найти произведение этой матрицы на число 3

РЕШЕНИЕ

$$3A = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-4) & 3\cdot 6 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot(-7) & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -12 & 18 & 3 \\ 15 & -21 & -6 \end{pmatrix}$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

3. СУММА (РАЗНОСТЬ) МАТРИЦ *A* и *B*

матрица $C_{m\times n}$ такая, что

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 3 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Найти $A + B$, $A - B$

РЕШЕНИЕ

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+1 & 1+1 \\ 2+(-4) & 1+2 & 2+0 \\ 1+1 & 2+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-1 & 1-1 \\ 2-(-4) & 1-2 & 2-0 \\ 1-1 & 2-2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

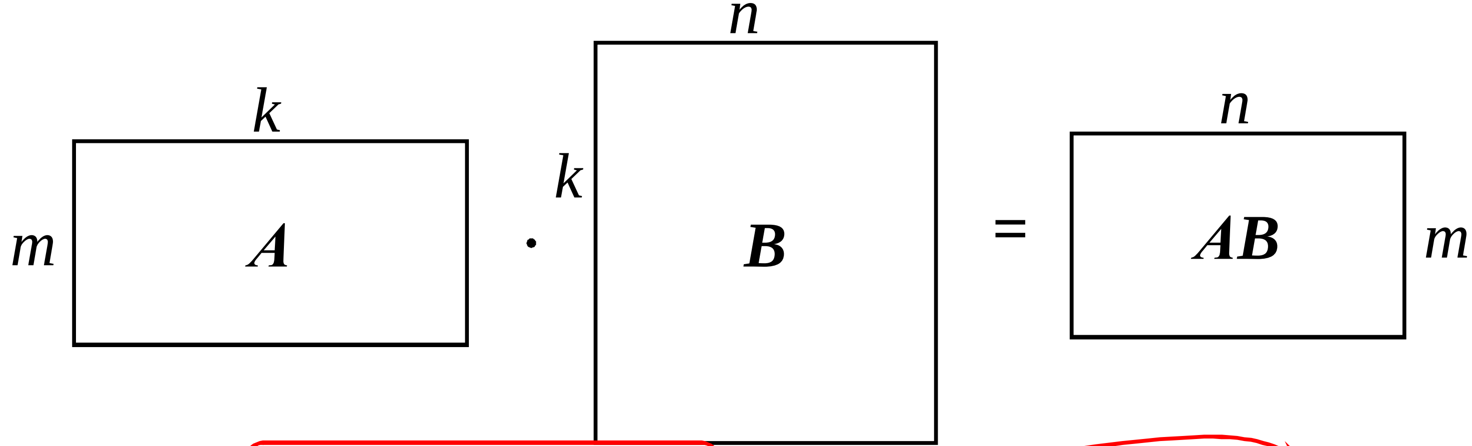
НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

$$AB \neq BA$$

правило **СОГЛАСОВАННОСТИ**:

число **СТОЛБЦОВ** матрицы A должно быть равно числу **СТРОК** матрицы B



$$m \times \boxed{k \qquad k} \times n \qquad m \times n$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textbf{\textit{i} строка} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{ik}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textbf{\textit{j} столбец} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

ПРИМЕР 4 Найти *AB* и *BA*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times \boxed{2}}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{2}\times 3} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 4} \\ 1 \quad 2 \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 9 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

1 столбец

1 строка

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\\5&6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&7&8\\9&2&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&8\\9&2&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccc}\text{1 столбец} & & \end{array}\\ \text{1 строка}\quad = & \begin{pmatrix}3\cdot 2+4\cdot 9 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}\end{array}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\\5&6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&7&8\\9&2&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&8\\9&2&0\end{pmatrix}=$$

2 столбец

1 строка

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 2+4\cdot 9 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 4} \\ 1 \quad 2 \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}} & 8 \\ 9 & & 0 \end{pmatrix} =$$

2 столбец

1 строка

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 8\\ 9 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7 & 8\\ 9 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 2+4\cdot 9 & 3\cdot 7+4\cdot 2 & 3\cdot 8+4\cdot 0\\ 1\cdot 2+2\cdot 9 & 1\cdot 7+2\cdot 2 & 1\cdot 8+2\cdot 0\\ 5\cdot 2+6\cdot 9 & 5\cdot 7+6\cdot 2 & 5\cdot 8+6\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42 & 29 & 24\\ 20 & 11 & 8\\ 64 & 47 & 40\end{pmatrix}$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

РЕШЕНИЕ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{3 \qquad\qquad 3} \times 2$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 7\cdot 1 + 8\cdot 5 & 2\cdot 4 + 7\cdot 2 + 8\cdot 6 \\ 9\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 5 & 9\cdot 4 + 2\cdot 2 + 0\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 70 \\ 29 & 40 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 2$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

5. ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ

переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением их порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 5 Транспонировать матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: **МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ**

ЦЕЛЬ: Закрепить навыки выполнения матричных операций

План:

1. Аудиторное решение задач.
2. Задание для контрольной работы.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $C = 3A - 4B$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 \\ 14 & -18 & -32 & -9 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 2 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Какое из произведений матриц AB, AC, BC существует?

$\underset{(2\times4)\times(4\times3)=(2\times3)}{AB}$ существует; $\underset{(2\times4)\times(2\times3)}{AC}$, $\overset{(4\times3)\times(2\times3)}{BC}$ не существует

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 3 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Найти произведение матриц AB.

$$AB=\begin{pmatrix} -4 & -18 & -1 \\ 14 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 4 Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицы: $D = AC + 3BC$

$G = AC + 3CB$

$Q = CA + 3CB$

$$D=\begin{pmatrix} 26 & -2 \\ -34 & -2 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 23 & 1 \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} 25 & 19 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 5 Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $D = A^T C - 2A^T B^T$

$$D=\begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 6 Найти куб матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

$\boldsymbol{a_1}$ – количество ГЛАСНЫХ букв в ИМЕНИ студента,

$\boldsymbol{a_2}$ – количество СОГЛАСНЫХ букв в ИМЕНИ студента,

$\boldsymbol{a_3}$ – количество ГЛАСНЫХ букв в ФАМИЛИИ студента,

$\boldsymbol{a_4}$ – количество СОГЛАСНЫХ букв в ФАМИЛИИ студента

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА 1 Дано $A = \begin{pmatrix} -2 & a_1 & 3 \\ a_3 + a_4 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & a_4 \\ -a_2 & a_3 & 4 \end{pmatrix}$

Найти $C = 2A - a_2 B$

ЗАДАЧА 2 Дано $A = \begin{pmatrix} a_2 & -1 & a_4 \\ 4 & a_3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & a_2 + a_3 \\ a_1 & -6 \\ 4 & a_4 \end{pmatrix}$

Найти произведения $C = AB$, $D = BA$

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

ЦЕЛЬ: Сформировать навыки вычисления определителей и обратной матрицы

План:

1. Определители второго и третьего порядка.
2. Обратная матрица и правила ее вычисления.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

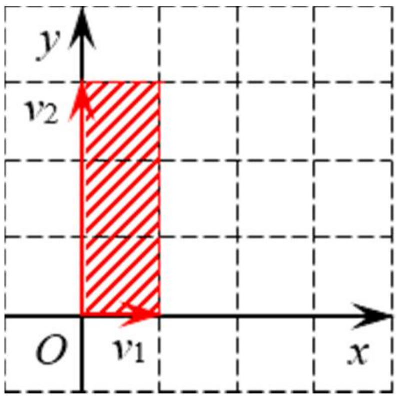
ЧИСЛО, являющееся характеристикой **КВАДРАТНОЙ** матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

ориентированный объем с учётом последовательности рассмотрения векторов-строк n-мерного параллелепипеда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = (1;0) \\ v_2 = (0;3) \end{matrix} \qquad S = 1\cdot 3 = 3$$



АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

алгебраическая сумма $n!$ произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца

ПРАВИЛА РАСЧЕТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$n=1$ $\qquad \Delta_1 = |A_1| = \det A_1 = a_{11}$

$n=2$ $\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$

ПРИМЕР 1 $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 29$

$n=3$

ПРАВИЛО САРРУСА

Pierre-Frederic Sarrus (1798-1861)

французский математик

$$\Delta_3 = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

ПРИМЕР 2

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & -8 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & -8 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{matrix} = 5\cdot 4\cdot 2 + (-8)\cdot 5\cdot(-6) + 7\cdot(-3)\cdot 3 - 7\cdot 4\cdot(-6) - 5\cdot 3\cdot 5 - (-8)\cdot(-3)\cdot 2 = 262$$

МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

МИНОР M_{ij} элемента a_{ij} –

определитель (n – 1) порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-й строки и j-го столбца

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ A_{ij} элемента a_{ij} –

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ПРИМЕР 3 Найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} элемента a_{32} в определителе:

$$\begin{array}{cc} & \text{2 столбец} \\ & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & a_{32} & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{3 строка} & \end{array}$$

РЕШЕНИЕ

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 6$$

ПРАВИЛА РАСЧЕТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА:

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ n-го ПОРЯДКА
ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРОКЕ (СТОЛБЦУ)

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

Пьер-Симон Лаплас (1749-1827)
французский математик, физик и астроном

миноры M_{1k} – являются определителем (n – 1)-го порядка, полученным из Δ_n вычеркиванием i-й строки и k-го столбца

Любой определитель n-го порядка можно свести к вычислению нескольких определителей (n – 1) порядка

ПРИМЕР 2 2-й способ – разложение по 2-й строке

$$\begin{vmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot((-8)\cdot 2 - 7\cdot 3) + 4\cdot(5\cdot 2 - 7\cdot(-6)) - 5\cdot(5\cdot 3 - (-8)\cdot(-6)) = 262$$

НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА

квадратная **МАТРИЦА** называется **НЕВЫРОЖДЕННОЙ** (неособенной),

если ее строки линейно НЕЗАВИСИМЫ, что означает

$$\det A \neq 0$$

квадратная **МАТРИЦА** называется **ВЫРОЖДЕННОЙ** (особенной),

если ее строки линейно ЗАВИСИМЫ, что означает

$$\det A = 0$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

МАТРИЦА A^{-1} называется **ОБРАТНОЙ** по отношению к КВАДРАТНОЙ матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она НЕВЫРОЖДЕНА

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1. МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ

алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A}$$

2. МЕТОД ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (Гаусса-Жордана)

$$\left(A\middle|E\right) \sim \left(E\middle|A^{-1}\right)$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

ПРИМЕР 4 Найти обратную матрицу к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

1. Вычисление определителя матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \Rightarrow \text{обратная матрица существует}$$

2. Транспонирование матрицы

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

ПРИМЕР 4 Найти обратную матрицу к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

3. Вычисление алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13 \qquad A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -7 & -10 & 6 \\ 1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

присоединенная (связанная, союзная) матрица

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

ПРИМЕР 4 Найти обратную матрицу к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -7 & -10 & 6 \\ 1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

4. Вычисление элементов обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -7 & -10 & 6 \\ 1 & 13 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 1/3 \\ 7/27 & 10/27 & -2/9 \\ -1/27 & -13/27 & -1/9 \end{pmatrix}$$

5. Проверка $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 1/3 \\ 7/27 & 10/27 & -2/9 \\ -1/27 & -13/27 & -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: **ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ**

ЦЕЛЬ: Закрепить навыки вычисления определителей и обратной матрицы

План:

1. Аудиторное решение задач.
2. Задание для контрольной работы.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1 Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

ЗАДАЧА 2 Найти миноры и алгебраические дополнения к элементам a_{12} a_{34} a_{13} a_{21}

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 3 Вычислить обратные матрицы к матрицам

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 4 Вычислить обратные матрицы к матрицам

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 12 \qquad \det A = -10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & -1/2 \\ 2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА 3 Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} a_1 & (-1)^{a_1} a_2 \\ (-1)^{a_4} a_3 & a_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -a_2 & a_3 \\ 2 & a_4 & 0 \\ a_1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

ЗАДАЧА 4 Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & (-1)^{a_1} a_2 \\ (-1)^{a_4} a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -a_3 \\ 3 & a_4 + 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: **СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

ЦЕЛЬ: Сформировать навыки решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

План:

1. Формы представления СЛАУ.
2. Методы решения СЛАУ (специальный случай).

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА СЛАУ

Система m линейных уравнений с n переменными $m \neq n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ

упорядоченная совокупность n чисел, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождество

НЕСОВМЕСТНАЯ

НЕ имеет ни одного решения

$\mathrm{rg}\,A \neq \mathrm{rg}\,A^*$

СОВМЕСТНАЯ

имеет ХОТЯ БЫ ОДНО решение

$\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,A^* = r$

ОПРЕДЕЛЕННАЯ

имеет ОДНО решение

$m = n$

НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ

имеет БОЛЕЕ ОДНОГО решения

$m < n$

количество переменных
n

выражаются через свободные

БАЗИСНЫЕ
r

+

СВОБОДНЫЕ
$n - r$

МАТРИЧНАЯ ФОРМА СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$AX = B$$

матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ТЕОРЕМА (ПРАВИЛО КРАМЕРА)

$$AX = B$$

число уравнений РАВНО числу неизвестных

$$\left.\begin{matrix} n = m \\ \det A \neq 0 \end{matrix}\right\}$$

система имеет решение, притом ЕДИНСТВЕННОЕ

уравнения системы НЕЗАВИСИМЫ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

$n = m$

$\det A \neq 0$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$

$EA = A$

2. МЕТОД КРАМЕРА

$n = m$

$\det A \neq 0$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}$$

$\det A$ – определитель A

Δ_j – определитель матрицы, получаемой заменой j-го столбца матрицы A столбцом B

3. МЕТОД ГАУССА

можно решить любую систему

$n = m$

$n \neq m$

приведение расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований к упрощенному виду

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Матричный метод

1. Запись системы в матричном виде $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Проверка существования решения системы (на совместность)

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

система совместна (решение существует и оно единственное)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Матричный метод

3. Вычисление обратной матрицы A^{-1}

$\det A = -27$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 1/3 \\ 7/27 & 10/27 & -2/9 \\ -1/27 & -13/27 & -1/9 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13 \quad A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -7 & -10 & 6 \\ 1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Матричный метод

4. Вычисление столбца неизвестных (решение)

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 1/3 \\ 7/27 & 10/27 & -2/9 \\ -1/27 & -13/27 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}$$

5. Проверка $AX = B$

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -7/3 \\ 13/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Метод Крамера

1. Запись системы в матричном виде $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Проверка существования решения системы (на совместность)

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

система совместна (решение существует и оно единственное)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Метод Крамера

3. Вычисление определителей, получаемых заменой столбцов матрицы коэффициентов столбцом свободных членов, и неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -9 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 108$$

замена

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{108}{-27} = -4$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Метод Крамера

3. Вычисление определителей, получаемых заменой столбцов матрицы коэффициентов столбцом свободных членов, и неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -9 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 63$$

замена

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{63}{-27} = -\frac{7}{3}$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Метод Крамера

3. Вычисление определителей, получаемых заменой столбцов матрицы коэффициентов столбцом свободных членов, и неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \boxed{6} \\ -1 & 0 & \boxed{-3} \\ 3 & -1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{-9} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -9 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -117$$

замена

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{-117}{-27} = \frac{13}{3}$$

4. Проверка (3 уравнение системы)

$$3 \cdot (-4) - \left(-\frac{7}{3}\right) + 2 \cdot \frac{13}{3} = -1$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

ПРИМЕР 1 Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Метод Гаусса

прямой ход

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -9 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & -33 \\ 0 & -1 & -7 & -28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \\ 0 & 3 & -6 & -33 \end{array}\right) \sim$$

система совместна обратный ход

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \\ 0 & 0 & -27 & -117 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 13/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 13/3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -7/3 \\ x_3 = 13/3 \end{cases}$$

Комитет образования, науки и молодежной политики Волгоградской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ
ГБПОУ «ВПТКР»

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА: **СЛАУ: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ**

ЦЕЛЬ: Закрепить навыки решения систем линейных алгебраических уравнений

План:

1. Аудиторное решение задач.
2. Задание для контрольной работы.

ЗАДАЧИ

Резниченко С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах, 2001 – стр. 520

ЗАДАЧА 1 Решить систему уравнений всеми известными способами

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

несовместна

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА 5

Решить систему уравнений всеми известными способами

$$\begin{cases} a_3 x_1 + x_2 - a_1 x_3 = a_2 \\ 3x_1 + a_4 x_2 - 2x_3 = a_3 \\ a_2 x_1 + x_3 = a_4 \end{cases}$$